

Índice

Prefácio	xv
1 Limites e continuidade	1
1.1 Noção de função	1
1.2 Espaço $\mathbb{R}^n$	2
1.2.1 Noções de norma e distância	3
1.3 Funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$	4
1.3.1 Exemplos do caso $n > 1$ em Economia	5
1.3.2 Exemplos do caso $m > 1$ em Economia	6
1.3.3 Domínio	7
1.3.4 Caso especial de $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, representação geométrica	7
1.4 Limite de uma função	9
1.4.1 Limite de uma sucessão	9
1.4.2 Algumas noções de topologia	11
1.4.3 Limite de uma função	14
1.4.4 Exemplos	16
1.4.5 Limite da função segundo um «caminho» específico	18
1.4.6 Resultados importantes sobre limites	20
1.5 Continuidade	24
1.5.1 Resultados de funções contínuas	26
1.6 Exercícios	31
2 Diferenciabilidade	35
2.1 Derivada de uma função real de variável real	35
2.1.1 Exemplos económicos — custo marginal e receita marginal	37
2.1.2 Elasticidade	38
2.1.3 Diferenciabilidade	39
2.2 Derivadas parciais	41
2.2.1 Vector gradiente e matriz jacobiana	43

2.3	Derivadas de ordem superior e matriz hessiana	44
2.4	Derivada da função num ponto segundo um vector	46
2.5	Diferenciabilidade	48
2.5.1	Função real de duas variáveis	49
2.5.2	Função real de n variáveis	53
2.5.3	Função vectorial	54
2.5.4	Condição suficiente para diferenciabilidade	55
2.5.5	Diferenciabilidade e derivada segundo um vector	57
2.6	Exercícios	60
3	Teorema da função composta	65
3.1	Derivada da função composta	65
3.2	Funções homogéneas e funções homotéticas	69
3.2.1	Dois exemplos económicos	70
3.2.2	Teorema de Euler	72
3.2.3	$f(x)/x_1^\alpha$ como função das razões x_i/x_1	74
3.2.4	Homogeneidade das derivadas parciais	75
3.2.5	Funções homotéticas	77
3.3	Exercícios	78
4	Fórmula de Taylor	83
4.1	Teorema dos acréscimos finitos	83
4.1.1	Máximos e mínimos	83
4.1.2	Teorema de Rolle	84
4.1.3	Teorema dos acréscimos finitos para $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	85
4.1.4	Teorema dos acréscimos finitos	87
4.1.5	Teorema de Schwarz-Young	90
4.2	Fórmulas de Taylor e de McLaurin	90
4.2.1	Função real de variável real	91
4.2.2	Função real de várias variáveis reais	94
4.3	Exercícios	101
5	Função inversa e função implícita	103
5.1	Teorema da função inversa	103
5.1.1	Funções reais de uma variável	104
5.1.2	Funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$	106
5.2	Teorema da função implícita	114
5.2.1	Matriz jacobiana da função definida implicitamente	119
5.2.2	Modelo keynesiano de determinação do rendimento	123

5.2.3	Equilíbrio no mercado de um bem	125
5.3	Exercícios	127
6	Optimização: introdução	131
6.1	Introdução	131
6.2	Algumas noções importantes	134
6.2.1	Máximos e mínimos e o teorema de Weierstrass	134
6.2.2	Como encontrar máximos e mínimos?	135
6.2.3	Formas quadráticas	136
6.2.4	Condição suficiente para um máximo local ser máximo global	139
6.3	Conjuntos e funções convexas e quase-convexas	140
6.3.1	Conjuntos convexos	140
6.3.2	Funções convexas/côncavas	141
6.3.3	Funções quase-convexas	150
6.4	Exercícios	156
7	Optimização livre	159
7.1	Função real de variável real	159
7.1.1	Condição necessária para o extremo local de uma função	160
7.1.2	Condições suficientes para o extremo local de uma função	161
7.1.3	Demonstração das condições necessárias e suficientes para uma função de classe C^2	162
7.2	Função real de várias variáveis	166
7.2.1	Função real de duas variáveis	167
7.2.2	Função real de n variáveis	175
7.2.3	Condições suficientes para extremos globais	178
7.2.4	Exemplo — maximização do lucro	179
7.3	O teorema do envelope	180
7.3.1	Exemplo — lema de Hotelling	183
7.4	Exercícios	183
8	Optimização com restrições de igualdade	185
8.1	Duas variáveis de decisão, uma restrição	185
8.1.1	Resolução gráfica	185
8.1.2	Método da substituição	187
8.1.3	Método dos multiplicadores de Lagrange	189
8.1.4	Condições suficientes	191
8.2	n variáveis de decisão, m restrições	193
8.2.1	Método dos multiplicadores de Lagrange	193

8.2.2	Condições suficientes	195
8.3	Interpretação dos multiplicadores de Lagrange	197
8.3.1	Exemplos económicos	199
8.4	Teorema do envelope	199
8.4.1	Exemplo — lema de Shepard	201
8.5	Exercícios	202
9	Optimização com restrições de desigualdade	207
9.1	Introdução	207
9.2	Condições de Kuhn-Tucker	208
9.2.1	Restrições de não-negatividade	208
9.2.2	Restrições de desigualdade	211
9.2.3	Os sinais dos multiplicadores de Lagrange	213
9.2.4	As condições de complementaridade	216
9.3	Discussão das condições de Kuhn-Tucker	217
9.3.1	Exemplo económico — o problema do consumidor	217
9.4	Teorema de Kuhn-Tucker	221
9.4.1	Teorema da suficiência	221
9.4.2	Restrição de qualificação	224
9.5	Programação quase-côncava	227
9.6	Exercícios	228
10	Integração	233
10.1	Primitivação e integração em $\mathbb{R}$	233
10.1.1	Primitivação	233
10.1.2	Integral definido	239
10.1.3	Relação entre integração e primitivação	244
10.1.4	Integrais impróprios	248
10.2	Integrais múltiplos	250
10.2.1	Cálculo de integrais duplos e mudança da ordem de integração	252
10.2.2	Outras regiões de integração	253
10.2.3	Método da substituição	256
10.3	Integrais paramétricos	260
10.4	Exemplos económicos	262
10.4.1	Relação entre investimento e <i>stock</i> de capital	262
10.4.2	Excedente do consumidor	263
10.5	Exercícios	264

11 Equações diferenciais	267
11.1 Introdução	267
11.2 Equações diferenciais	268
11.3 Equações diferenciais ordinárias	269
11.3.1 Alguns tipos de equações diferenciais ordinárias	270
11.3.2 Um exemplo simples	271
11.4 Equações não-lineares de primeira ordem	272
11.4.1 Equações diferenciais exactas	272
11.4.2 Equações separáveis	274
11.4.3 Equação diferencial homogénea	275
11.4.4 Diagramas de fases e estabilidade	277
11.4.5 Exemplo económico — modelo neoclássico de crescimento	278
11.5 Equações lineares com coeficientes constantes	280
11.5.1 Equações lineares de primeira ordem	280
11.5.2 Equações lineares de segunda ordem	287
11.5.3 Equações lineares com coeficientes constantes de ordem superior	297
11.6 Exercícios	300
12 Sistemas de equações diferenciais	303
12.1 Transformação de uma equação de ordem superior num sistema	303
12.2 Algumas propriedades da solução geral do sistema	305
12.3 Solução do sistema homogéneo	306
12.3.1 Caso das raízes reais e distintas	307
12.3.2 Caso das raízes complexas	308
12.3.3 Caso das raízes reais repetidas	308
12.3.4 Uma forma alternativa de explicar a solução complementar	311
12.4 Solução particular, equilíbrio e estabilidade	312
12.5 Diagrama de fases com duas variáveis	313
12.5.1 Tipos de equilíbrio	315
12.6 Exemplo económico — inflação e desemprego	316
12.7 Exercícios	318
13 Equações e sistemas de equações às diferenças	321
13.1 Diferenças e <i>lags</i>	322
13.1.1 Operador diferença	322
13.1.2 Operadores avanço e atraso	323
13.2 Equações às diferenças	324
13.2.1 Exemplo simples	326
13.3 Equações lineares com coeficientes constantes	328

13.3.1	Resultados básicos sobre equações lineares	328
13.3.2	Equações de segunda ordem	330
13.3.3	Equações de ordem superior	335
13.3.4	Exemplo económico — modelo da «teia de aranha»	337
13.4	Sistemas de equações às diferenças	337
13.4.1	Solução de sistemas de equações às diferenças	339
13.4.2	Resolução em notação matricial	340
13.4.3	Exemplo — sondagens usando painéis	341
13.5	Exercícios	342
14	Optimização dinâmica	347
14.1	Introdução	347
14.2	O problema de controle	348
14.2.1	Exemplo económico — extracção de um recurso não-renovável	350
14.3	Cálculo de variações	351
14.3.1	A equação de Euler	351
14.3.2	Condição de transversalidade	354
14.4	Programação dinâmica	356
14.4.1	Problema de controle em tempo discreto	358
14.4.2	Exemplo económico — consumo intertemporal	359
14.5	O princípio do óptimo	361
14.5.1	Interpretação do princípio do óptimo	366
14.5.2	Exemplo económico — crescimento económico óptimo	368
14.6	Exercícios	372
	Solução dos exercícios	375
	Bibliografia	415
	Índice Remissivo	417